Parte Práctica

1. Se sabe que la función $f(x) = e^x - 1 - 2x$ tiene 2 raíces, una en $x = 0$ y otra en el intervalo $[1, 2]$. Considere las siguientes funciones de iteración para encontrar la raíz no nula:

$$x_{n+1} = \frac{e^{x_n} - 1}{2}, \qquad x_{n+1} = \ln(1 + 2x_n).$$

   Decida si existe un intevarlo de convergencia para cada una de ellas. Justifique.

2. Aproxime la función $f(x) = e^{-3x}$ para $x \in (0, \infty)$, por un polinomio cuadrático utilizando el método de cuadrados mínimos respecto a la función de peso $\omega(x) = e^{-x}$ y considerando los polinomios de Laguerre.

   Ayuda: Los Polinomios de Laguerre están definidos como

$$\phi_k(x) = \frac{e^x}{k!} \frac{d^k}{dx^k}(x^k e^{-x})$$

   para todo $x \in [0, \infty), k = 0, 1, 2, \ldots$ *Además, se sabe que para cada* n *natural vale que* $\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx = n!$

3. Considere el problema

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & -2x_1 - 3x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 + x_2 \leq 8, \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{array}$$

   Grafique las restricciones, resuelva usando el método Simplex, de el minimizador y el valor mínimo.

4. Considere la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

   (a) Deduzca la iteración de Jacobi para resolver el sistema lineal $Ax = b$ para algún vector $b \in \mathbb{R}^3$.

   (b) ¿Es esta iteración convergente? Justifique la respuesta.

5. **Sólo alumnos libres.**

   (a) Determine el polinomio interpolante de grado menor o igual a 3 en la forma de Newton, que interpola los siguientes datos:

$$(1,0), \quad (2,-1), \quad (3,0), \quad (4,1).$$

   (b) Asuma que se obtiene un dato adicional $(5,0)$. Recalcule el polinomio interpolante en la forma de Newton. (Nota: se evaluará la forma en que se haga este item, no solamente el resultado).

Parte Teórica

1. De la definición de una función spline en general y de las condiciones para que sea un spline cúbico natural.
2. De una deducción de la regla de Simpson para una función en el intervalo $[0,1]$.
3. Demuestre el teorema de convergencia del método de bisección.